**(Повна назва навчального закладу + факультет за бажанням)**

Лабораторна робота №1

на тему:

**”Алгоритм Евкліда”**

Підготував(ла)

студент групи **ЦТ-11**

**Шроль Олександр**

2022

**Загальні відомості**

**Евклід** (близько 325 — близько 270 до н. е.) — старогрецький математик і визнаний основоположник [математики](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0), автор перших теоретичних трактатів з [математики](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0), що дійшли до сучасності.

Біографічних даних про життя Евкліда майже не збереглося. Відомо, що народився він в [Афінах](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%84%D1%96%D0%BD%D0%B8), жив в [Александрії](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D1%96%D1%8F) при [Птолемеї І](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%82%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%B9_I_%D0%A1%D0%BE%D1%82%D0%B5%D1%80), царювання якого припадає на 306—283 роки до н. е. Вважають, що Евклід вчився в Афінах і був учнем [Платона](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BD). Більшість афінських геометрів були послідовниками Платона, проте цього не можна сказати про Евкліда. Як розповідає [Папп Александрійський](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D0%BF%D0%BF_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D1%96%D0%B9%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9) (друга половина ІІ ст. н. е.), Евклід заснував в Александрії свою школу. Папп повідомляє також, що Евклід був м'якою і люб'язною людиною з усіма, хто міг хоча б у найменшій мірі сприяти розвитку математичних наук.

Основна праця Евкліда [**«Начала»**](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%87%D0%B0%D0%BB%D0%B0_%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%96%D0%B4%D0%B0) складається із серії книжок, у яких міститься систематизований виклад [геометрії](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F), а також деяких питань [теорії чисел](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB). «Начала» відіграли винятково важливу роль у подальшому розвитку математичної науки. Історичне значення цієї праці полягає в тому, що в ній уперше здійснено спробу [логічної](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%BE%D0%B3%D1%96%D0%BA%D0%B0) побудови геометрії на основі аксіоматики. Зміст «Начал» свідчить про велику повагу їх автора до традиції, оскільки він зберіг у них деякі поняття, які в його час не вживались.

«Начала» складаються з тринадцяти книг. Перша та деякі інші книги містять на початку списки визначень. У першій книзі подається 23 попередніх визначення об'єктів геометрії: наприклад, [«точка](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BA%D0%B0) — це те, що не має частин»; [«лінія](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D1%96%D0%BD%D1%96%D1%8F) — це довжина без ширини»; [«пряма лінія](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D1%8F%D0%BC%D0%B0) — це та, що однаково розташована відносно точок на ній». Уводяться визначення [кута](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D1%82), [площини](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BB%D0%BE%D1%89%D0%B8%D0%BD%D0%B0), [квадрата](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82), [кола](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BE), [сфери](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B0), [призми](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%BC%D0%B0_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)), [піраміди](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%96%D1%80%D0%B0%D0%BC%D1%96%D0%B4%D0%B0_(%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F)), п'яти [правильних многогранників](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA) тощо. Далі подано п'ять постулатів і дев'ять аксіом. Як правило, постулати задають базові побудови (наприклад, «потрібно, щоб через будь-які дві точки можна було провести пряму»), а аксіоми — загальні правила виведення при операції з величинами (наприклад, «якщо дві величини дорівнюють третій, вони рівні між собою»). З сучасної точки зору, різниці між постулатами і аксіомами нема. Система аксіом Евкліда послужила базисом для логічного виведення (ґрунтуючись і на постулатах із визначеннями) решти 465 теорем і задач «Начал» утворюючи разом із постулатами Евкліда конструктивний «каркас» геометрії Евкліда.

У I книзі вивчаються властивості [трикутників](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%BA%D1%83%D1%82%D0%BD%D0%B8%D0%BA) і [паралелограмів](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC); цю книгу вінчає знаменита [теорема Піфагора](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9F%D1%96%D1%84%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B0) для прямокутних трикутників. Книга II, виходить від піфагорійців, присвячена так званій «геометричній алгебрі». У III і IV книгах висловлюється геометрія кіл, а також вписаних і описаних багатокутників; при роботі над цими книгами Евклід міг скористатися творами [Гіппократа Хіосського](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%96%D0%BF%D0%BF%D0%BE%D0%BA%D1%80%D0%B0%D1%82_%D0%A5%D1%96%D0%BE%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9). У V книзі вводиться загальна теорія пропорцій, побудована [Евдоксом Кнідським](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D1%81_%D0%9A%D0%BD%D1%96%D0%B4%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9), а в VI книзі вона додається до теорії подібних фігур. VII—IX книги присвячені теорії чисел і знов посилаються до піфагорійців; автором VIII книги, можливо, був [Архіт Тарентський](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D1%85%D1%96%D1%82_%D0%A2%D0%B0%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9). У цих книгах розглядаються теореми про пропорції і геометричні прогресії, вводиться метод для знаходження найбільшого загального дільника двох чисел (відомий нині як [алгоритм Евкліда](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D1%96%D0%B4%D0%B0)), подається метод побудови ряду парних [досконалих чисел](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE), доводиться нескінченність множини [простих чисел](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE). У X книзі, що є найоб'ємнішою і найскладнішою частиною «Начал», будується класифікація ірраціональностей; можливо, що її автором є [Теєтет Афінський](https://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A2%D0%B5%D1%94%D1%82%D0%B5%D1%82_%D0%90%D1%84%D1%96%D0%BD%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9&action=edit&redlink=1). XI книга містить основи [стереометрії](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%8F). У XII книзі за допомогою методу вичерпання доводяться теореми про співвідношення площ кіл, а також об'ємів пірамід і конусів; автором цієї книги за загальним визнанням є [Евдокс Кнідський](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%B4%D0%BE%D0%BA%D1%81_%D0%9A%D0%BD%D1%96%D0%B4%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9). Нарешті, XIII книгу присвячено побудові п'яти правильних багатогранників; вважається, що частина побудов була розроблена Теєтетом Афінським.

Зазвичай про «Начала» кажуть, що після [Біблії](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%96%D0%B1%D0%BB%D1%96%D1%8F) це найпопулярніша писемна пам'ятка старовини. Протягом двох тисяч років вона була настільною книгою школярів, використовувалася як початковий курс геометрії. «Начала» користувалися винятковою популярністю, і з них було знято безліч копій працьовитими переписувачами. Згодом «Начала» з папірусу перейшли на пергамент, а потім на папір. Протягом чотирьох століть від винайдення книгодрукування «Начала» видавалися близько 2500 разів: в середньому виходило щорічно 6—7 видань.

**Опис використаного методу**

Я використовую геометричний метод розв’язку – він неважкий і має небагато обчислень.

Запишемо рівняння прямої, яка проходить, наприклад, через точки A і B. Отримаємо: (x - xa)(yb - ya) – (xb - xa)(y - ya) = 0.

Тепер для будь-якої точки (x;y) ми можемо обчислити ліву частину наведеної рівності. Для точок, що лежать на прямій, ми повинні отримувати нуль. У той же час пряма розіб'є площину на дві напівплощини. Точки, що лежать в одній напівплощині, будуть давати позитивні значення. А точки з іншої напівплощини негативні.

Ми готові перевірити першу умову, чи належить точка D тієї ж напівплощини, що й точка C щодо прямої AB. Для цього підставимо обидві точки в ліву частину рівняння прямої і переконаємося, що отримано значення одного й того самого знака. Виконуємо ті самі дії з всіма точками і якщо всюди однакові значення, то точка D всередині трикутника. Якщо ні, то поза трикутником або на ньому.

Перевіряємо чи точка належить стороні AB трикутника. Для цього знову перевіряємо чи отримуємо ми 0 з рівняння і чи належить точка D проміжку AB. Для перевірки чи належить проміжку точка, нам потрібно знайти довжину самого проміжку, та довжини проміжків AD і BD, після чого порівняти AB і (AB+BD). Якщо вони рівні, то точка D належить проміжку AB, якщо ні, то вона поза трикутником. Виконуємо ті самі дії ще до прямої BC i AC.

Щоб дізнатись чи співпадає точка D з будь-якої з вершин трикутника, просто порівнюємо координати всіх точок з координатами точки D.

Нарешті, після всіх виконаних дій виписуємо результат.

**Код програми**

**(Можна скопіювати код програми чи додати зрозумілі видимі скріни екрану. При необхідності додавайте коментарі безпосередньо в коді)**

**#include <iostream>**

**#include <string>**

**#include <format>**

**#include <cmath>**

**using namespace std;**

**// Рівняння прямої**

**double eq(double xa, double ya, double xb, double yb, double xd, double yd)**

**{**

**return ((xd - xa) \* (yb - ya)) - ((xb - xa) \* (yd - ya));**

**}**

**// Перевірка чи точка D i C лежать з одної сторони відносно прямої AB**

**bool isOnSameSide(double xa, double ya, double xb, double yb, double xc, double yc, double xd, double yd)**

**{**

**return eq(xa, ya, xb, yb, xc, yc) \* eq(xa, ya, xb, yb, xd, yd) > 0;**

**}**

**// Перевірка чи лежить точка на іншій точці**

**bool isOnPoint(double xa, double ya, double xd, double yd)**

**{**

**return (xa == xd) && (ya == yd);**

**}**

**// Довжина вектора**

**double vLength(double xa, double ya, double xb, double yb)**

**{**

**return sqrt((xb - xa) \* (xb - xa) + (yb - ya) \* (yb - ya));**

**}**

**// Перевірка чи точка D входить до проміжку**

**bool isBetween(double xa, double ya, double xb, double yb, double xd, double yd)**

**{**

**return vLength(xa, ya, xb, yb) == (vLength(xa, ya, xd, yd) + vLength(xb, yb, xd, yd));**

**}**

**// Перевірка чи точка D належить стороні трикутника**

**bool isOnSide(double xa, double ya, double xb, double yb, double xd, double yd)**

**{**

**return eq(xa, ya, xb, yb, xd, yd) == 0 && isBetween(xa, ya, xb, yb, xd, yd);**

**}**

**// Перетворення з double в string з 2 нулями після коми**

**string cToStr(double d)**

**{**

**return to\_string(d).substr(0, to\_string(d).find(".") + 3);**

**}**

**int main()**

**{**

**// Створення змінних**

**double A[] = { 0,0 };**

**double B[] = { -2,-2 };**

**double C[] = { 0,-2 };**

**double D[2];**

**cout << "Triangle: \nA(" << A[0] << ";" << A[1] << ")\nB(" << B[0] << ";" << B[1] << ")\nC(" << C[0] << ";" << C[1] << ")" << endl;**

**// Введіть координати точки D**

**cout << "Enter point D(x; y): ";**

**cin >> D[0] >> D[1];**

**string pD = ("D(" + cToStr(D[0]) + "; " + cToStr(D[1]) + ")");**

**bool isInside = isOnSameSide(A[0], A[1], B[0], B[1], C[0], C[1], D[0], D[1]) && isOnSameSide(C[0], C[1], A[0], A[1], B[0], B[1], D[0], D[1]) && isOnSameSide(B[0], B[1], C[0], C[1], A[0], A[1], D[0], D[1]); // Перевірка чи точка D у трикутнику**

**bool isOnTheSide = isOnSide(A[0], A[1], B[0], B[1], D[0], D[1]) || isOnSide(A[0], A[1], C[0], C[1], D[0], D[1]) || isOnSide(B[0], B[1], C[0], C[1], D[0], D[1]); // Перевірка чи належить точка D одній із сторін трикутника**

**bool isOnThePoint = isOnPoint(A[0], A[1], D[0], D[1]) || isOnPoint(B[0], B[1], D[0], D[1]) || isOnPoint(C[0], C[1], D[0], D[1]); // Перевірка чи лежить точка D на одній із вершин трикутника**

**// Результат**

**cout << "The point " << pD << " is on another point of triangle : " << isOnThePoint << endl;**

**cout << "The point " << pD << " is on side of triangle : " << isOnTheSide << endl;**

**cout << "The point " << pD << " is inside of triangle : " << isInside << endl;**

**cout << "The point " << pD << " is outside of triangle : " << !isInside << endl;**

**}**